

which also, obviously, transform Eq. (6) into Eq. (7). In Fig. 1 the refracting angle of the echelon is denoted by ϵ , which symbol also means the blaze angle of the immersion grating. This is justified by the assumption that we work close to the blaze. $n_g \equiv n_i$ implies $\beta \equiv \alpha_i$, of course.

It is very interesting to note that the second term of Eq. (7), as before, represents the resolving power of the prism. Mitra neglects this term in comparison with

the "immersion" part μ . The same term also appears when the echelon is used in transmission. To our knowledge, though, no author has found it worthwhile to discuss the contribution of the prism, with the possible exception of VON LAUE⁸, who did not, however, consider the dispersion nor the resolution.

⁸ M. VON LAUE, Phys. Z. **6**, 283 [1905].

Nichtgleichgewichtsrechnungen zu einem mittels einer Laval-Düse erzeugten Plasma-Parallelstrahl

J. ARTMANN *

DVL-Institut für Plasmadynamik, Stuttgart

(Z. Naturforsch. **23 a**, 2132–2134 [1968]; eingeg. am 31. August 1968)

In der folgenden Arbeit sollen an Hand möglichst einfacher Modellvorstellungen einige theoretische Untersuchungen über strömende Plasmen durchgeführt und mit experimentellen Ergebnissen verglichen werden. Der allgemeinen Betrachtung liegt ein kräftefreier Plasma-Parallelstrahl zugrunde, der mittels eines sogenannten Plasmabrenners durch Entspannung eines lichtbogeengeheizten Argonplasmas in einer Laval-Düse erzeugt wurde. Allein dieser Erzeugungsmechanismus kann zur Folge haben, daß Elektronen- und Gastemperatur (Temperatur der schweren Teilchen) und die Reaktionsprozesse im Plasmastrahl nicht im Gleichgewicht sind. Man muß deshalb allgemein die eine Strömung beschreibenden Erhaltungssätze für jede Teilchensorte formulieren¹.

Die Kontinuitätsgleichung hat dann die Form

$$\partial \rho_s / \partial t + \operatorname{div}(\rho_s \mathbf{u}_s) = \dot{w}_s \quad (1 \text{ a})$$

(\mathbf{u}_s und ρ_s = Strömungsgeschwindigkeit bzw. Dichte der Komponente s , t = Zeit), wobei \dot{w}_s die Summe der die Teilchensorte s erzeugenden und vernichtenden Prozeßraten ist.

Vernachlässigt man von vornherein alle Reibungs- und Kontaktwärmeleitungsphänomene, sowie sämtliche elektrischen Ströme und äußeren Kräfte, und läßt nur ein inneres elektrisches Feld $\mathbf{E}^{(i)}$ zu, das die Gleichheit von Elektronen- und Ionengeschwindigkeit bewirkt, so vereinfacht sich die entsprechende Impuls- oder Kraftgleichung wie folgt

$$\mathbf{R}_s + \mathbf{u}_s \dot{w}_s + \rho_s \frac{D \mathbf{u}_s}{Dt} = -\operatorname{grad} p_s + \mathbf{C}_s + n_s q_s \mathbf{E}^{(i)} \quad (2 \text{ a})$$

[\mathbf{R}_s = Reibungsglied (Impulsaustausch durch elastische Stöße); \mathbf{C}_s = Impulserzeugung bzw. Vernichtung durch

unelastische Stöße; p_s , n_s und q_s = Druck, Teilchendichte und Ladung der Komponente s].

Die Energiegleichung mit den zu Gl. (2 a) eingeführten Voraussetzungen lautet für stationäre Strömungen

$$\operatorname{div} \left[\rho_s \mathbf{u}_s \left(h_s + \frac{\mathbf{u}_s^2}{2} \right) \right] = S_{ss} + n_s q_s \mathbf{u}_s \mathbf{E}^{(i)} \quad (3 \text{ a})$$

(h_s = spezifische Enthalpie der Sorte s , in S_{ss} sind für die Sorte alle Energien berücksichtigt, die durch Stöße und Strahlung allgemein gebildet oder vernichtet werden).

Damit sind alle Gleichungen formuliert, die zur Beschreibung einer Strömung, auf die die eingeführten Vernachlässigungen zutreffen, benötigt werden.

Setzt man eine gemeinsame Geschwindigkeit aller Komponenten und eine gemeinsame Temperatur der schweren Teilchen (Gastemperatur) voraus, so sind die Unbekannten des Systems die Gradienten der Geschwindigkeit der Teilchendichten und der Gas- und Elektronentemperatur. Vorausgesetzt, daß im Parallelstrahl an jedem Ort derselbe Druck p herrscht und dieser dem meßtechnisch leicht zugänglichen Umgebungsdruck entspricht, so folgt aus dem eindimensionalen Gesamtimpulssatz

$$\rho u \frac{du}{dx} = - \frac{dp}{dx} \quad (4)$$

[Summation der Gl. (2 a) über alle Teilchensorten, p = Gesamtdruck, u = gemeinsame Strömungsgeschwindigkeit, ρ = Gesamtdichte], daß die Geschwindigkeitsänderung Null ist.

Gibt man Geschwindigkeit, Teilchendichten und Temperaturen vor, so kann man zunächst die Teilchendichtegradienten aus der vereinfachten Kontinuitätsgleichung (1 a) bei bekannten Prozeßraten

$$u \frac{d\rho_s}{dx} = \dot{w}_s(1) \quad (1 \text{ b})$$

sofort berechnen. Hierbei ist berücksichtigt worden, daß bei den bisher in diesem Zusammenhang untersuchten Geschwindigkeiten von einigen 10^5 cm/sec nur die Relaxationserscheinungen des Grundzustandes „1“ maßgeblich sind^{2, 3}. Der Verlauf der Elektronentem-

* Robert Bosch GmbH, Forschungslaboratorium, Stuttgart.

¹ J. P. APPLETON u. K. N. BRAY, J. Fluid Mech. **20**, (Part 4), 659 [1964].

² D. R. BATES, A. E. KINGSTON u. R. W. P. MCWHIRTER, Proc. Roy. Soc. London A **267**, 297 [1962].

³ R. W. P. MCWHIRTER u. A. G. HEARN, Proc. Phys. Soc. London **82**, 641 [1963].



peratur folgt dann bei bekanntem Energiequellterm aus der Energiegleichung (3 a) für die Elektronen

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{3}{2} n_e u k T_e \right) + k T_e n_e \frac{du}{dx} = S_{ee}, \quad (3 b)$$

wobei neben einigen Vernachlässigungen als Folge der kleinen Elektronenmasse das innere elektrische Feld durch den Impulssatz (2 a) eliminiert wurde. Beschränkt man sich auf den Bereich der 1. Ionisation, dann ergibt sich für den Energiequellterm

$$S_{ee} = \frac{1}{m_A} \dot{w}_A(1) E_1 - Q_{\text{rad}} - n_e \sum_{k=1}^n n_k Q_{ek} \quad (3 c)$$

$$\text{mit } Q_{eA} = \frac{3 m_e}{m_A} \left(\frac{8 k T_e}{\pi m_e} \right)^{1/2} (k T_e - k T) \sigma_{eA}$$

$$\text{und } Q_{eJ} = \frac{2 q e^4 (2 \pi m_e)^{1/2}}{m_J} \frac{k T_e - k T}{(k T_e)^{3/2}} \ln \left[1 + \frac{9 (k T_e)^3}{4 \pi q e^6 z J^2 n_e (1 + z J)} \right]$$

(Index A, J bzw. e = Atom, Ion bzw. Elektron, Q_{rad} = die pro sec und cm^3 abgestrahlte Energie, E_1 = Ionisierungsenergie für die 1. Ionisation, σ_{eA} = Wirkungsquerschnitt für entsprechende elastische Stöße, m = Masse und z = Ladungszahl).

Der noch unbekannte Differentialquotient der Gastemperatur läßt sich jetzt aus der Gesamtenergiegleichung berechnen, die wiederum durch Summation über alle vorhandenen Teilchensorten gebildet wird zu [siehe Gl. (3 a)]

$$\frac{d}{dx} \left(h + \frac{1}{2} u^2 \right) = - \frac{Q_{\text{rad}}}{\rho u}. \quad (5)$$

Die spezifische Gesamtenthalpie h beinhaltet hier auch die Ionisationsenergie.

Treffen für die betrachtete Strömung die Voraussetzungen eines optisch dünnen Maxwell'schen Plasmas zu, so kann man die ablaufenden Ionisations- und Rekombinationsprozesse in 1. Näherung wasserstoffähnlich rechnen und aus der Arbeit ² entnehmen.

$$\frac{1}{m_A} \dot{w}_A(1) = -n_e n_A S + n_e n_J \alpha. \quad (1 c)$$

(α, S = sogen. Strahlungsstoß-Rekombinations- und Ionisationswirkungsquerschnitte. Da nach den vorliegenden Messungen ^{4,5} die Elektronendichte als Funktion der Länge des Strahls den Wert $n_e = 10^{14}$ nicht übersteigt, erscheinen bei einem Druck von $p = 1,5$ Torr diese Vereinfachungen erlaubt.)

Sieht man zunächst einmal von der Abstrahlung ab, so sind bei den vorliegenden Meßergebnissen für Elektronendichten ($10^{14} > n_e > 10^{10}$) und Teilchentemperaturen ($10^4 \geq T_e \geq 5 \cdot 10^3$, $3 \cdot 10^3 \geq T \geq 2,5 \cdot 10^3$) an Hand der Energiegleichung der Elektronen bereits einige Aussagen über den Elektronentemperaturverlauf möglich. In 1. Näherung ist dann im Energiequellterm

[Gl. (3 c)] der 1. Summand gegenüber dem 3. Summanden vernachlässigbar. Da die Gastemperatur bei der verhältnismäßig geringen Elektronendichte durch Stöße mit den heißeren aber vergleichsweise leichten Elektronen kaum geändert werden dürfte, wird sich die Elektronentemperatur der Gastemperatur anzunähern suchen. Betrachtet man unter diesen Voraussetzungen die Prozeßraten selbst [Gl. (1 c)], so ergibt eine weitere 1. Abschätzung, daß trotz fallender Elektronentemperatur im Strahl die maßgeblichen Rekombinationsraten nicht ausreichen, um bei den gemessenen Geschwindigkeiten von einigen 10^5 cm/sec, auch bis zu einer Beobachtungsstrecke von 40 cm (vom Düsenende an gerechnet), die Elektronendichte wesentlich zu ändern. Diese Aussagen werden durch die genauere Rechnung (Lösung des Differentialgleichungssystems ohne Strahlungsverluste) gut bestätigt (siehe Abb. 1). Wäh-

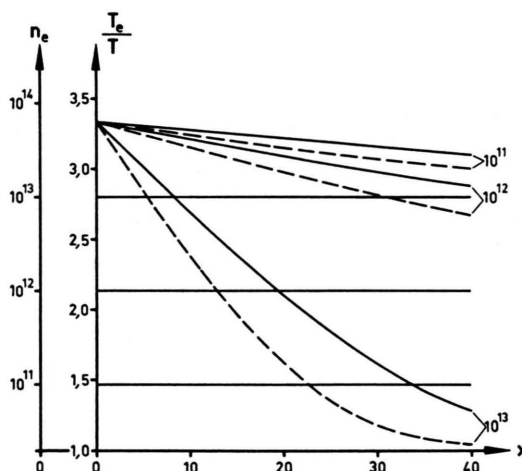


Abb. 1. Temperaturverhältnis T_e/T und Elektronendichte n_e [cm^{-3}] ohne Abstrahlung als Funktion der Strahllänge x [cm] (Gesamtdruck $p = 1,5$ Torr) für die Anfangswerte ($x = 0$) der Elektronendichten $n_e = 10^{11}, 10^{12}, 10^{13}$ [cm^{-3}], der Elektronentemperatur $T_e = 10^4$ [°K] und der Gastemperatur $T = 3 \cdot 10^3$ [°K] bei den Strömungsgeschwindigkeiten $u = 2 \cdot 10^5$ (gestrichelt) und $u = 3 \cdot 10^5$ [cm/sec] (durchgezogen).

rend je nach Höhe der Elektronendichte die Elektronentemperatur mehr oder weniger schnell absinkt, bleiben Elektronendichte und Gastemperatur im Rahmen der Auftraggenauigkeit konstant. [Für die spektroskopisch gemessenen Größen ⁵ der Gastemperatur ($T \approx 3000$ °K) und der Strömungsgeschwindigkeiten ($3 \cdot 10^5 \geq u \geq 2 \cdot 10^5$) wurden die Anfangsbedingungen für die Elektronendichte bei anfänglich gleicher Elektronentemperatur ($T_e = 10^4$ °K) variiert.] Die Relaxationszeit für die Rekombination ist also wesentlich größer als die Laufzeit des Plasmas, während die Relaxationszeit des Temperaturausgleiches durch elastische Stöße durchaus in der Größenordnung der Laufzeit liegt. Die verhältnismäßig schnelle Strömung verschleppt demnach die

⁴ F. KÜNSTLER u. D. GOLL, DVL-SW, Institut für Plasmadynamik, persönliche Mitteilung.

⁵ W. L. BOHN, M.-U. BETH u. G. NEDDER, J. Quant. Spectr. Radiat. Transfer. 7, 661 [1967].

Ionisation⁶ in Gebiete geringerer Temperatur (nahezu eingefrorene Strömung). Ein Ionisationsgleichgewicht ($w_s = 0$ bei nicht verschwindenden Prozeßraten), wie es die Anwendung jeder Ionisationsgleichung voraussetzt⁵, stellt sich nicht ein.

Dieser Effekt kann durch die Berücksichtigung der Abstrahlung dann noch verstärkt werden, wenn die abgestrahlte Leistung in Konkurrenz zur elastischen Wechselwirkung tritt [siehe Gl. (3 c)]. Während bei den leichten Gasen, wie Wasserstoff oder Helium, die elastische Wechselwirkung meistens überwiegt, sind für unser Beispiel Argon zumindest im 1. Drittel der Strahlänge Abstrahlung und elastische Wechselwirkung in der gleichen Größenordnung. Das hat zur Folge, daß

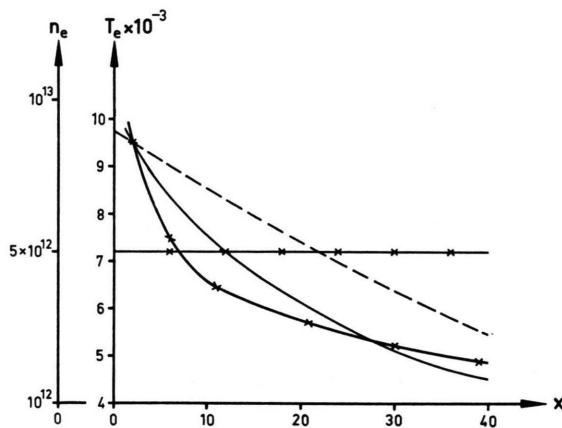


Abb. 2. Elektronentemperatur T_e [°K] und Elektronendichte n_e [cm⁻³] als Funktion der Strahlänge x [cm] (Gesamtdruck $p = 1,5$ [Torr]) für die Anfangswerte ($x = 2$ cm) der Elektronendichte $n_e = 5 \cdot 10^{12}$ [cm⁻³], der Elektronentemperatur $T_e = 9,5 \cdot 10^3$ [°K] und der Gastemperatur $T = 3 \cdot 10^3$ [°K] mit und ohne Abstrahlung (durchgezogen bzw. gestrichelt) bei der Strömungsgeschwindigkeit $u = 2,7 \cdot 10^5$ [cm/sec]. Zum Vergleich sind entsprechende Meßkurven⁴ eingetragen (*—*).

die Elektronentemperatur anfangs steiler abfällt, die Elektronendichte aber weiterhin nahezu ungeändert bleibt, wie es auch den Mikrowellenmessungen⁴ (siehe Abb. 2) zu entnehmen ist (die Strahlungsverluste wurden ebenfalls wasserstoffähnlich gerechnet).

Um den Realitäten der betrachteten Strömung noch näher zu kommen, soll in einer folgenden Arbeit versucht werden, neben dem Reibungsverzehr der Strömung insbesondere auch die radialen Profile der interessierenden Größen in die Rechnung mit einzubeziehen, um auch Verschleppungseffekte durch radiale ambipolare Diffusion zu untersuchen. Besonders interessant wird es in diesem Zusammenhang aber auch sein, die Entspannung in der Laval-Düse einschließlich Aufheizung, d. h. die Entstehung der Parallelströmung selbst, näher zu betrachten, da für die verschiedensten Parameter der freien Strömung die Vorgeschichte des Plasmas ausschlaggebend ist. Dabei sollen auch die metastabilen Zustände berücksichtigt werden.

Abschließend sei hier noch vermerkt, daß für eine ganze Reihe von Plasmen das durch eine Strömung gestörte Reaktionsgleichgewicht eine wesentliche Rolle spielen kann. Da selbst bei höheren Dichten und Drücken, wie in Strömungen innerhalb und hinter starken Stoßwellen⁷ oder als Folge der ambipolaren Diffusion in heißen Lichtbögen⁶, die Endlichkeit der Relaxationszeit zur Einstellung irgendeines Reaktionsgleichgewichts diese Plasmen und ihre Diagnostik entscheidend beeinflussen kann, wäre es interessant, ebenfalls zu untersuchen, inwieweit diese Strömungsphänomene — abgesehen von der Instationarität — auch Funkenplasmen, oder mit Lasern erzeugte Plasmen oder sogar turbulente Sternplasmen beeinflussen.

Zur numerischen Lösung der Differentialgleichungen wurde das Runge-Kutta-Verfahren herangezogen, dessen Schrittweite mittels eines eigens hierfür entwickelten Verfahrens jeweils optimal angepaßt wurde. Die Rechnungen erfolgten auf einem UNIVAC 1107-Rechenautomaten.

⁶ K. BERGSTEDT, Bericht aus dem Institut für Plasmaphysik, Garching, IPP 3/64 [1967].

⁷ L. M. BIBERMANN u. I. T. YAKUBOV, Vysokikh Temperatur 3, (No. 3), 340 [1965].